
2023年 4月

* 固有値の計算方法 *

[著者] 算生会 黒田 英夫

算生会の振動解析ソフトで採用している固有値計算方法を説明します。固有値は単一行列の固有値を意味する標準固有値と、複数の行列から成る一般固有値の2つがあります。また振動解析では振動方程式に基づく固有値を一般固有値として計算します。

固有値を計算する行列は対称行列と非対称行列があります。対称行列の場合は、固有値はすべて実数ですが、非対称行列の場合は、固有値は実数または複素数となります。なお、固有値の計算では、任意個数の固有値および固有ベクトルを算出します。

<目次>

	ページ
第1章 対称行列の標準固有値の計算方法 -----	2
第2章 非対称行列の標準固有値の計算方法 -----	9
第3章 固有値計算のパラメーター条件 -----	19
第4章 MK型振動固有値の計算方法 -----	20
第5章 MCK型振動固有値の計算方法 -----	22
[参考文献] -----	25

第1章 対称行列の標準固有値の計算方法

1.1 標準固有値問題

標準固有値問題は、単一の対称行列Aについての固有値を解析する問題で、次式で表わされます。

$$A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x} \quad (1-1)$$

ただし、A：対称行列（n次）

λ：固有値

x：固有ベクトル（n次）

標準固有値解析では、(1)式について、固有値λと固有ベクトルxを算出します。対称行列Aの固有値λは実数となります。行列Aがn次のときは固有値λもn個あります。ただし、固有値の個数は重根も重複して勘定します。算生会のソフトでは、絶対値の大きい順または小さい順に任意個数の固有値と各固有値対応の固有ベクトルを算出できます。

なお、一般固有値問題は、行列が2個以上の方程式で表わされる問題であり、標準固有値問題に変換して計算することができます。

1.2 固有値計算の解法

対称行列の標準固有値問題の解法には種々ありますが、算生会のソフトではヤコビ(Jacobi)法とランチョス(Lanczos)法を採用しています。2つの解法を採用しているのは、行列次数が比較的小さい行列にはヤコビ法を、大きい行列にはランチョス法を用いるためです。大きい行列になりますと、元行列のままでは計算時間がかかりますので、行列次数の小さい行列に変換して計算します。その1つの方法がランチョス法です。ランチョス法で小行列に変換して算出できる固有値は1~数個程度です。上記の2つの解法を区分する行列次数の大きさの目安は200程度と考えています。

ヤコビ法は元行列をそのまま操作して固有値を算出するもので、すべての固有値と固有ベクトルを同時に算出します。ヤコビ法は収束性が良く、非常に安定した解法です。

他方、ランチョス法は、元行列をいったん小行列に変換するもので、その後、小行列の固有値を他の解法で算出します。本ソフトでは小行列の固有値の算出に上記のヤコビ法を使用します。なお、ランチョス法は計算時間が非常に短いという特長がありますが、計算途中のベクトル間の直交性がくずれると固有値が重複したり偽の解が現われるなど、計算処理に注意が必要です。

<備考>行列次数の小さい対称行列に対する他の解法として、ハウスホルダー

(Householder)法も試してみました。しかし、ハウスホルダー法はヤコビ法に比べてずっと計算時間が長くなることがわかり、不採用としました。

1.3 ヤコビ法^{G5)}

ヤコビ法は元行列の非対角要素をすべて消去して固有値を算出します。すべての固有値と固有ベクトルが同時に求まります。なお、ヤコビ法により算出された固有ベクトルは、後で正規化します。

注) 正規化とは、ベクトルの大きさを1に揃えることです。

(1-1)式に対して次式の変換を行いません。

$$\mathbf{x} = \mathbf{R} \mathbf{x}' \quad (1-2)$$

ただし、 \mathbf{R} : 変換行列 (n次)、 \mathbf{x}' : ベクトル (n次)

(1-2)式を(1-1)式に代入すると

$$\mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{R} \mathbf{x}' \quad (1-3)$$

(1-3)式の両辺に左側から \mathbf{R}^T をかけると

$$\mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{E} \mathbf{x}' \quad (1-4)$$

ただし、 \mathbf{E} : 単位行列

\mathbf{R}^T : \mathbf{R} の転置行列

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{E} \quad (1-5)$$

ここで、(1-4)式が次のようになる \mathbf{R} が存在すると仮定します。

$$\mathbf{A}' \mathbf{x}' = \lambda \mathbf{x}' \quad (1-6)$$

ただし、

$$\mathbf{A}' = \mathbf{R}^T \mathbf{A} \mathbf{R} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \lambda_n \end{bmatrix} \quad (1-7)$$

すなわち、 \mathbf{A}' はn個の固有値 λ_i を与える対角行列です。

すべての固有ベクトルを列単位に並べた正方行列を \mathbf{V} とおくと、定義により、

$$\mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{V} \lambda \quad (1-8)$$

上式に左側から \mathbf{V}^{-1} を掛けると

$$\mathbf{V}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{V} \lambda = \lambda \mathbf{E} \quad (1-9)$$

ただし、右上付きの $^{-1}$ は逆行列を意味します (以下同様)。

(1-4)式と(1-9)式を見比べると次式が成立します。

$$\mathbf{V} = \mathbf{R} \quad (1-10)$$

それ故、本問題は \mathbf{A} を対角化する変換行列 \mathbf{R} を求めることに帰着します。

上記の固有値の変換行列 \mathbf{R} を求めるのに、ヤコビ法を用います。簡単のため、2次元変換で説明します。この変換は、行列 \mathbf{A} の非対角項をゼロにするものです。

2次元行列 \mathbf{A} を次のように定義します。ただし、対称行列の特性を入れてあります。

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \quad (1-11)$$

また、直交座標系の回転変換は次のようになります。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \end{bmatrix} \quad (1-12)$$

$$\begin{aligned}
\therefore A' &= R' A R = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} \cos \theta + a_{12} \sin \theta & a_{12} \cos \theta + a_{22} \sin \theta \\ -a_{11} \sin \theta + a_{12} \cos \theta & -a_{12} \sin \theta + a_{22} \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} a_{11} \cos^2 \theta + 2a_{12} \sin \theta \cos \theta + a_{22} \sin^2 \theta & a_{12}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (a_{22} - a_{11}) \sin \theta \cos \theta \\ a_{12}(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (a_{22} - a_{11}) \sin \theta \cos \theta & a_{11} \sin^2 \theta - 2a_{12} \sin \theta \cos \theta + a_{22} \cos^2 \theta \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1-13}$$

(1-13)式右辺の非対角項を消去するには、

$$a_{12} (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + (a_{22} - a_{11}) \sin \theta \cos \theta = 0 \tag{1-14}$$

両辺を $\cos^2 \theta$ で割って $\tan \theta$ に書き直すと次のようになります。

$$\therefore a_{12} - a_{12} \tan^2 \theta + (a_{22} - a_{11}) \tan \theta = 0 \tag{1-15}$$

$$\therefore \tan \theta = \frac{-(a_{11} - a_{22}) \pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2}}{2a_{12}} \tag{1-16}$$

ここで、(1-16)式の分子の \pm については、 $+$ を採用することにします（いずれを採用しても可）。そして、(1-16)式の $\tan \theta$ から、次式により $\cos \theta$ と $\sin \theta$ を算出します。

$$\cos \theta = \sqrt{\frac{1}{1 + \tan^2 \theta}} \tag{1-17}$$

$$\sin \theta = \cos \theta \tan \theta \tag{1-18}$$

ヤコビ法では上記の回転変換をすべての非対角項に適用します。その際、非対角項の内、最も大きな要素を選択し、その値をゼロにするように変換します。もしその項が i 行 j 列の要素であるならば、上記の変換説明における添え字1、2のかわりに i 、 j を使用します。そして、すべての非対角項が打切り誤差以下になるまで変換操作を繰り返します。ただし、上記のように非対角項の最大要素の選択を行列全体で行なうやり方では、その最大要素の探索に要する時間は行列次数のべき乗で増加し、行列次数が大きくなると計算時間が大幅に増えてしまいます。そこで、本ソフトでは、最大要素の探索を効率化するため、行列の10行毎に最大要素を探索するやり方に改良しています。

上述のようにして変換を k 回繰り返して目的の行列 A' が得られたとすると、その結果は次のようになります。

$$R_k^T \cdots R_2^T R_1^T A R_1 R_2 \cdots R_k = A' \tag{1-19}$$

すなわち、

$$V^T A V = A' \tag{1-20}$$

$$\text{ただし、} V = R_1 R_2 \cdots R_k \tag{1-21}$$

n 個の固有ベクトルは上記 V の各列として得られます。

1.4 ランチョス法 ^{(C5), (B2), (B4)}

ランチョス法は、1つのベクトルと元行列Aの掛け算を繰り返すことにより、次数の小さい3重対角行列（対角とその両隣の要素にのみ数値のある行列）Tを生成するものです。生成されたTも対称行列で、その固有値は元行列Aと共通です。

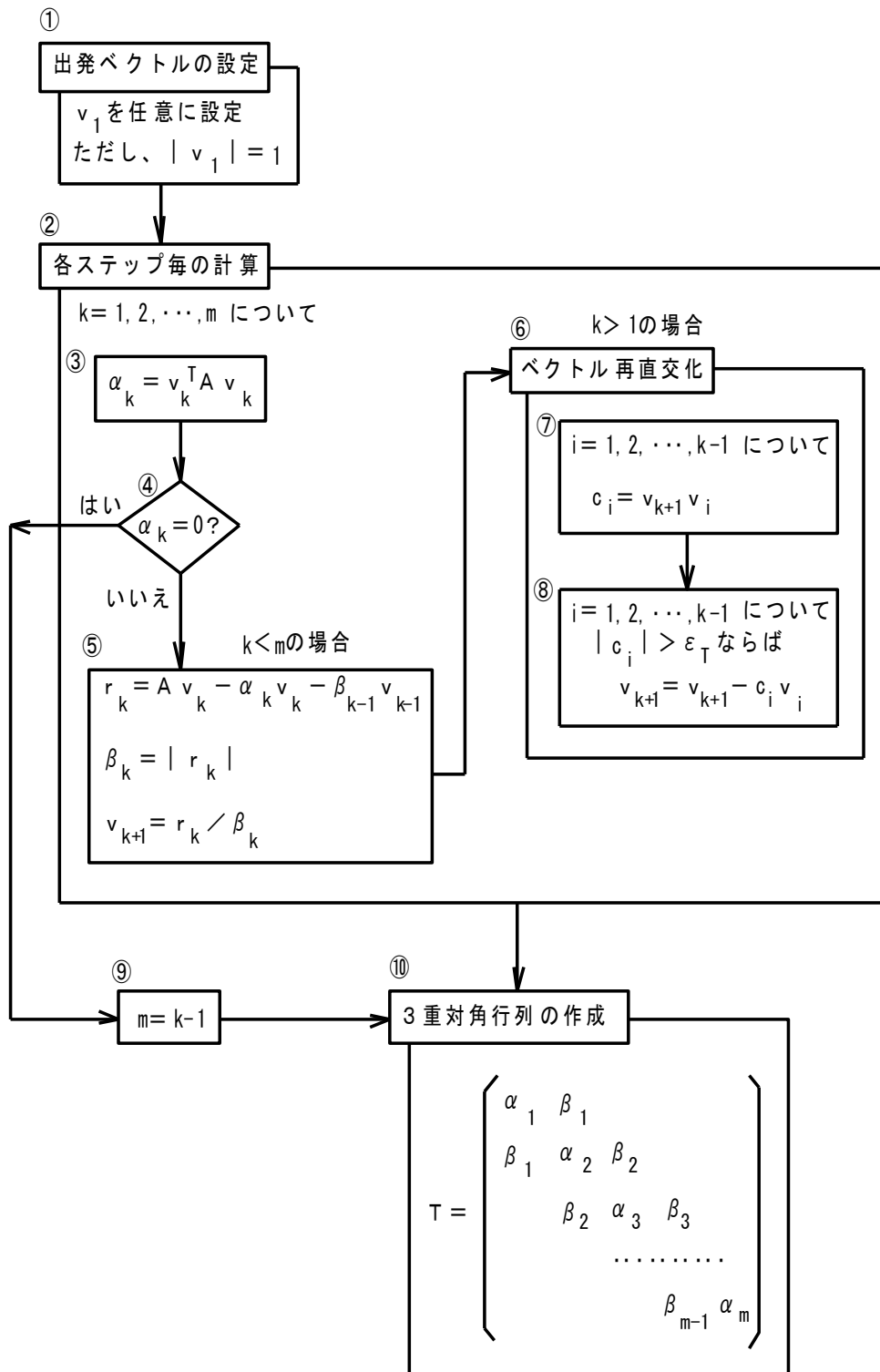
注）ランチョス法は、対称行列に対するものと、非対称行列に対するものがあります。ここでは、対称行列に対する計算方法を示します。なお、非対称行列に対するランチョス法では、2つのベクトルと行列Aの掛け算を繰り返します。

図1-1にランチョス法の計算フロー図を示します。同図には、ベクトル再直交化を含め、計算式も掲載してあります。ただし、ベクトル再直交化は不必要なものまで実施すると固有値の精度が落ちることがありますので、同図の基準比率 ε_T は小さくしすぎずはいけません。

図1-1の②「各ステップ毎の計算」において、繰り返し回数mはあらかじめ与えておきます。この回数mは、所定個数の固有値を問題なく算出するのに必要な数ということになりますが、あまり厳密に考える必要はなく、少し多めにしておけばすみます。本ソフトでは、mを自動設定でもユーザー設定でも可能なようにしています。自動設定の場合は、文献^{B11)}を参考にしてmを $2\sqrt{n}$ としています（nは行列Aの次数）。ただし、nが小さい場合は、 $2\sqrt{n}$ では小さくなりすぎますので、mは最小20とし、nが20より小さければnを入れるようにしています。また、図1-1の④に示すように、 α_k が0になった場合はそこで打ち切り、⑨で前回までの繰り返し回数k-1を新たなmとし、⑩「3重対角行列の作成」に移ります。

3重対角行列Tを生成した後は、前項のヤコビ法によって固有値を計算します。3重対角行列はヘッセンベルグ行列（対角左隣の要素から右側のみに数値のある行列）の1種ですから、後述のQR法でも解くことができます。しかし、ヤコビ法の方がQR法よりも安定していますので、ヤコビ法を採用しています。

ヤコビ法は固有値と同時に固有ベクトルを算出しますが、次数を小さくした行列Tの固有ベクトルは元行列Aのものとは当然異なります。それ故、行列Aの固有ベクトルは後述の計算方法により別途算出します。



注) A : 対称行列、 r_k 、 v_k : ベクトル
 v_k^T : v_k の転置ベクトル
 ε_T : ベクトル再直交化の基準比率 (例 : 0.01)

図1-1 ランチョス法の計算フロー図

1.5 固有ベクトルの計算方法

前項のランチョス法の場合、固有ベクトルは各固有値 λ 毎に計算します。その方法は、(1-1) 式を変形した次式の行列方程式を使用します。

$$(A - \lambda E) \mathbf{x} = 0 \quad (1-22)$$

上式の左辺の () 内は既知であり、ベクトル \mathbf{x} の 1 つの要素に数値を設定すれば、連立 1 次方程式として解くことができます。従って、本ソフトでは \mathbf{x} の第 1 要素 x_1 を 1 に設定して固有ベクトル \mathbf{x} を算出します。その後でベクトル \mathbf{x} を正規化します。

1.6 ベクトルの正規化

固有ベクトル間で各変数要素の大きさを比較するため、本ソフトでは固有ベクトルの正規化（ベクトルの大きさを 1 に調整）を行いません。正規化前のベクトルを \mathbf{x} とすると、その大きさ L は次式で表わされます。

$$L = \sqrt{\mathbf{x}^T \mathbf{x}} \quad (1-23)$$

従って、正規化後のベクトル \mathbf{x}' は次式で計算できます。

$$\mathbf{x}' = (1/L) \mathbf{x} \quad (1-24)$$

1.7 固有値の計算順序への対応

1.3 節のヤコビ法では、すべての固有値と固有ベクトルを同時に算出しますので、固有値を絶対値の大きい順に計算するか小さい順にするかは関係ありません。しかし、1.4 節のランチョス法では、小行列 T に変換しますので、固有値の計算順序への対応が必要となります。ランチョス法で元行列 A を小行列 T に変換すると、行列 A の固有値は絶対値の大きい方から行列 T に入ってきます。そのため、絶対値の小さい順に固有値を計算したい場合は、(1-1) 式を次のように書き換えます。

$$A^{-1} \mathbf{x} = (1/\lambda) \mathbf{x} \quad (1-25)$$

上式は、 A^{-1} と $1/\lambda$ を新たに A と λ とおけば、(1-1) 式となりますので、同式で絶対値の大きい順の固有値計算問題として解きます。そして、絶対値の大きい順に算出された固有値 λ に対して $1/\lambda$ を計算すれば、元の行列の固有値が絶対値の小さい順に求まったこととなります。

1.8 行列要素のバランス処理

これは、行列内の要素数値間で絶対値のレベル差を小さくする処理を言います。要素数値間で絶対値のレベル差が大きいと固有値計算の誤差も大きくなる傾向があります。本ソフトでは、回転変換による対角要素のバランス処理を用意しており、下記に計算方法を説明します。

まず、対角要素間で、2つの要素数値の差が最大のものを探索します。次に、その2要素の数値を等しくするように回転変換を行ないます。この操作を繰り返して、対角要素間のレベル差を低減します。

回転変換は、1.3節のヤコビ法で説明したものと同様です。ただし、バランス処理では、2つの対角要素の値を等しくするように変換します。従って、(1-13)式における2つの対角要素の値を等しくおくと次式となります。

$$\begin{aligned} & a_{11}\cos^2\theta + 2a_{12}\sin\theta\cos\theta + a_{22}\sin^2\theta \\ & = a_{11}\sin^2\theta - 2a_{12}\sin\theta\cos\theta + a_{22}\cos^2\theta \end{aligned} \quad (1-26)$$

$$\therefore (a_{11} - a_{22})\sin^2\theta - 4a_{12}\sin\theta\cos\theta - (a_{11} - a_{22})\cos^2\theta = 0 \quad (1-27)$$

両辺を $\cos^2\theta$ で割って $\tan\theta$ に書き直すと次のようになります。

$$(a_{11} - a_{22})\tan^2\theta - 4a_{12}\tan\theta - (a_{11} - a_{22}) = 0 \quad (1-28)$$

$$\therefore \tan\theta = \frac{2a_{12} \pm \sqrt{4a_{12}^2 + (a_{11} - a_{22})^2}}{a_{11} - a_{22}} \quad (1-29)$$

ここで、(1-29)式の分子の \pm については、 $+$ を採用することにします（いずれを採用しても可）。そして、(1-29)式の $\tan\theta$ から、(1-17)式、(1-18)式により $\cos\theta$ 、 $\sin\theta$ を算出します。後はヤコビ法と同様に、変換行列 R を作成して $R^T A R$ の行列演算を行ないます。

第2章 非対称行列の標準固有値の計算方法

2.1 標準固有値問題

標準固有値問題は、単一の非対称行列 A についての固有値を解析する問題で、次式で表わされます。式の形態は対称行列の場合の(1-1)式と同じですが、複素数を取り扱う都合上、別の記号に変更しています。

$$A \mathbf{z} = \mu \mathbf{z} \quad (2-1)$$

ただし、 A : 非対称行列 (n次)

μ : 複素数の固有値

$$\mu = \alpha + i \beta \quad (2-2)$$

ここで、 α : 固有値の実数部

β : 固有値の虚数部

i : 虚数記号

\mathbf{z} : 複素数の固有ベクトル (n次)

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + i \mathbf{y} \quad (2-3)$$

ここで、 \mathbf{x} : 固有ベクトルの実数部 (n次)

\mathbf{y} : 固有ベクトルの虚数部 (n次)

標準固有値解析では、(2-1)式について、固有値 μ と固有ベクトル \mathbf{z} を算出します。非対称行列の場合は、固有値が実数になったり複素数になったりします。それはn次方程式の根が実数もあれば虚数もあるということと同じです。また、固有値に応じて固有ベクトルも実数か複素数になります。そのため、固有値 μ と固有ベクトル \mathbf{z} はそれぞれ(2-2)式、(2-3)式のように実数部と虚数部に分けて表わします。

対称行列の場合と同様に、本ソフトでは、絶対値の大きい順または小さい順に任意個数の固有値と各固有値対応の固有ベクトルを算出できます。なお、一般固有値問題は、行列が2個以上の方程式で表わされる問題であり、標準固有値問題に変換して計算することができます。

2.2 固有値計算の解法

非対称行列の標準固有値問題の解法にも種々ありますが、本ソフトではハウスホルダー (Householder) 法とアーノルディ (Arnoldi) 法を採用しています。2つの解法を採用しているのは、行列次数が比較的小さい行列にはハウスホルダー法を、大きい行列にはアーノルディ法を用いるためです。大きい行列になりますと、元行列のままでは計算時間がかかりますので、行列次数の小さい行列に変換して計算します。その1つの方法がアーノルディ法です。アーノルディ法で小行列に変換して算出できる固有値は1~数個程度です。上記の2つの解法を区分する行列次数の大きさの目安は50程度と考えています。対称行列の大小行列区分の目安200に比べて1/4になっているのは、非対称行列の方がずっと計算時間がかかるからです。

ハウスホルダー法およびアーノルディ法とも、元行列をヘッセンベルグ行列 (対角左隣の要素から右側のみに数値のある行列) に変換します。そのヘッセンベルグ行列の大きさ (次数) は、ハウスホルダー法では元行列と同じであり、アーノルディ法では縮小した

ものとなります。

生成されたヘッセンベルグ行列に対しては、QR複合方式により固有値を計算します。QR複合方式は、複素固有値対応のダブルQR法と実数固有値対応のシングルQR法を組合せたもので、固有値が複素数でも実数でも自動的に対応できるようにしています。なお、上記のダブルQR法は、2段のQR分解を繰り返すことにより、実数計算のままで、ヘッセンベルグ行列から複素数の固有値を算出する手法です。

<備考>

- ①非対称行列では複数の固有値を算出した場合、複素数と実数が混在することがあります。複素数と実数が混在すると、固有値の絶対値の大きさの順序がくずれることがあります。
- ②非対称行列の他の解法として、ランチョス(Lanczos)法も試してみました。ランチョス法は、アーノルディ法と同様に計算時間を大幅に低減できるメリットがありますが、アーノルディ法よりも安定性に劣るため不採用としました。なお、このランチョス法は非対称行列に対するもので、前述の対称行列に対するものとは異なります。

2.3 ハウスホルダー法^{B2)}

ハウスホルダー法は、任意の行列をヘッセンベルグ行列に変換する手法です。その変換行列として、対称な直交行列Hを使用し、Hには次の性質があります。

$$H = H^T = H^{-1} \quad (2-4)$$

ハウスホルダー法は、先ず第1列をヘッセンベルグ化し、次に第2列というように順次進めていきます。すなわち、先ず対象の行列A(次数n)を次式のように第1行第1列と残りの行列Bとに区分けします。

$$A = \left[\begin{array}{c|c} a_{11} & \mathbf{w}^T \\ \hline \mathbf{v} & B \end{array} \right] \quad (2-5)$$

ただし、 \mathbf{v} 、 \mathbf{w} : ベクトル
B : 行列 (次数はn-1)

ここで第1段の直交行列 H_1 を次式で定義します。

$$H_1 = E - (1/c) \mathbf{u}_1 \mathbf{u}_1^T \quad (2-6)$$

$$\text{ただし、} c = s(s + a_{21}) \quad (2-7)$$

$$s = (a_{21} \text{の符号}) \sqrt{\sum_{i=2}^n a_{i1}^2} \quad (2-8)$$

$$u_1 = \begin{bmatrix} a_{21} + s \\ a_{31} \\ \dots \\ \dots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \quad (2-9)$$

そして、第1段の変換行列 Q_1 を次式のように設定します。

$$Q_1 = \left[\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline 0 & H_1 \end{array} \right] \quad (2-10)$$

従って、相似変換 $Q_1 A Q_1$ により、(2-5) 式のベクトル v の部分が第3行以降0となります。次に、第1行第1列を除外した $(n-1)$ 行 \times $(n-1)$ 列の行列について、全く同様の操作により変換行列 H_2 を作成し、次式の Q_2 を設定して第2列を処理します。

$$Q_2 = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \\ \hline 0 & & H_2 \end{array} \right] \quad (2-11)$$

以下同様に、順次、第 $(n-2)$ 列まで処理することにより、最終的に次式の計算が行なわれたことになり、行列全体がヘッセンベルグ行列となります。ヘッセンベルグ行列が得られたら、後述のQR複合方式により固有値を計算できます。

$$Q^{-1} A Q = Q_{n-2} \cdots Q_2 Q_1 A Q_1 Q_2 \cdots Q_{n-2} \quad (2-12)$$

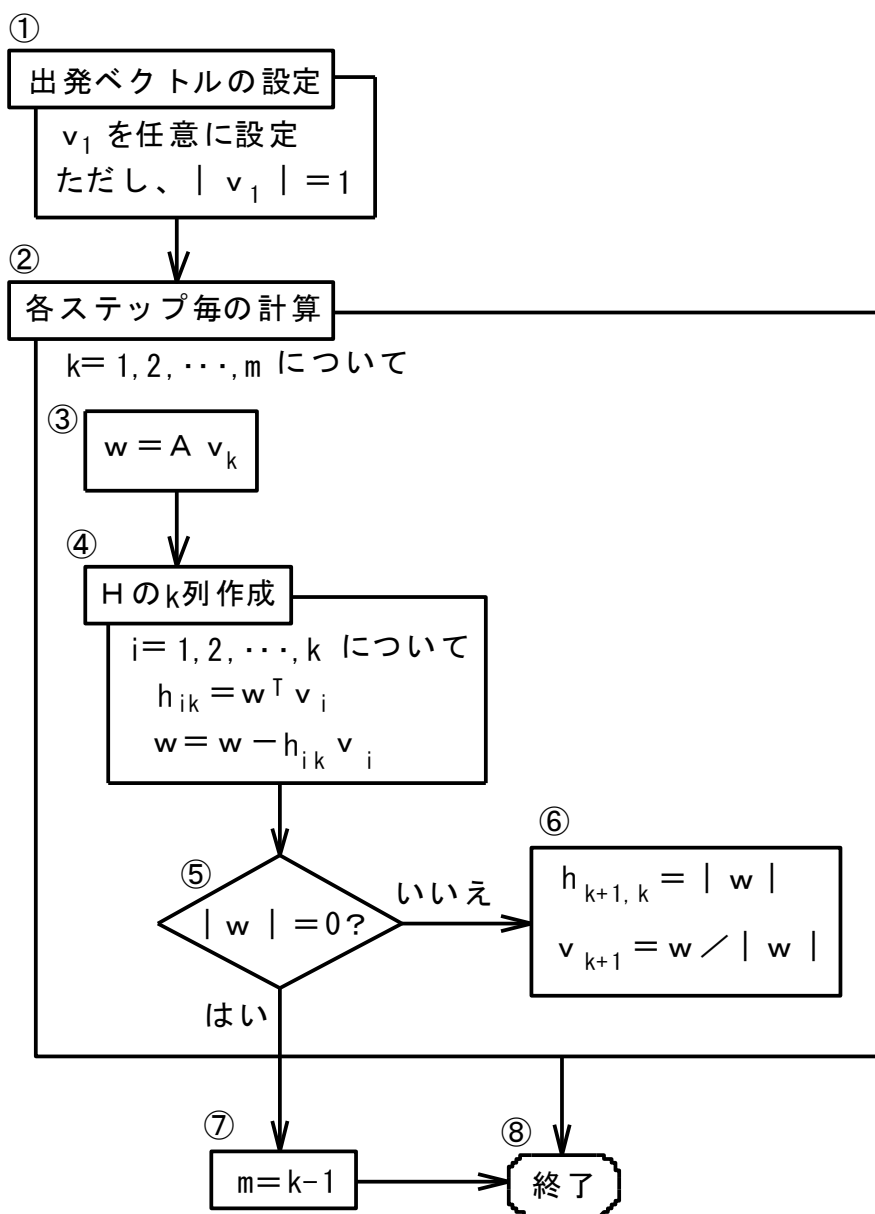
2.4 アーノルディ法 ^{B4)}

アーノルディ法は、1つのベクトルと元行列 A の掛け算を繰り返すことにより、次数の小さいヘッセンベルグ行列 H を生成するものです。行列 H の固有値は元行列 A と共通です。

図2-1にアーノルディ法の計算フロー図を示します。同図には必要な計算式も掲載してあります。同図の②「各ステップ毎の計算」において、繰り返し回数 m はあらかじめ与えておきます。この回数 m は、所定個数の固有値を問題なく算出するのに必要な数ということになりますが、あまり厳密に考える必要はなく、少し多めにしておけばすみます。本ソフトでは、 m を自動設定でもユーザー設定でも可能なようにしています。自動設定の場合は、対称行列のランチョス法と全く同様の設定としています。すなわち、 m を原則として $2\sqrt{n}$ としています (n は行列 A の次数)。ただし、 n が小さい場合は、 $2\sqrt{n}$ では小さくなりすぎますので、 m は最小20とし、 n が20より小さければ n を入れるようにしています。また、図2-1の⑤に示すように、 $|w|$ が0になった場合はそこで打ち切り、⑦で前回までの繰り返し回数 $k-1$ を新たな m として終了します。ただし、通常はこの途中での繰り返し計算打ち切りは起きません。本計算フローが終了した段階で、 m 行 \times m 列のヘッセンベルグ行列 H ができあがっています。

図2-1の計算フロー図からわかるように、アーノルディ法は簡単な計算手法です。また、同図④「Hのk列作成」において、ベクトルwの演算式に見られるようにすべてのベクトルについて直交化が施されています。

ヘッセンベルグ行列が得られたら、次項のQR複合方式により固有値を計算できます。



注) A : 非対称行列、 v_k 、 w : ベクトル
 w^T : w の転置ベクトル
 H : ヘッセンベルグ行列
 h_{ik} はその要素

図2-1 アーノルディ法の計算フロー図

2.5 QR複合方式

QR複合方式は、ヘッセンベルグ行列に対して、ダブルQR法とシングルQR法を組合せて、複素数および実数の固有値を順次算出する手法です。本方式では、最初にダブルQR法で複素数の固有値を計算し、収束しなかったらシングルQR法に切り換えて実数の固有値を計算します。もし両方のQR法とも収束しなかった場合は、収束誤差の小さい方を採用します。そして当該固有値が確定したら、行列を減次して、再びダブルQR法に戻って計算を続けます。指定個数の固有値を算出したら計算を終了します。

2.6 シングルQR法^{B2)}

ヘッセンベルグ行列に対して、相似変換を繰り返して上三角行列（対角要素から右側だけに数値がある行列）にする方法にQR法があります。このQR法を次項のダブルQR法と区別してシングルQR法と呼ぶことにします。シングルQR法では、現時点のヘッセンベルグ行列 A_k （次数 n ）に対して、次式のように直交行列 Q_k^T を左側から掛けて上三角行列 R_k にします。

$$Q_k^T A_k = R_k \quad (2-13)$$

$$\therefore A_k = Q_k R_k \quad (2-14)$$

(2-14)式のように A が Q と R の積で表わされますので、QR分解と呼ばれます。そして、次式により A_{k+1} を作ります。

$$A_{k+1} = R_k Q_k = Q_k^T A_k Q_k \quad (2-15)$$

この A_{k+1} は A_k と相似で同じくヘッセンベルグ行列となります。この相似変換を収束するまで繰り返すと、最後に(2-16)式の形の上三角行列となります（実数固有値の場合）。そして対角要素 $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ が固有値です。実際の計算処理においては、最初は次数 n の全体行列で計算しますが、最終行の対角左隣の要素 $a_{n, n-1}$ が0（打切り誤差以下）に収束したら、最終行と最終列を除外して行列の次数を減らし、同様の計算を繰り返していきます。

注) $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ が固有値であることは、 $|A_{k\text{end}} - \lambda E| = 0$ から容易にわかります。

$$A_{k\text{end}} = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & a_{33} & \cdots & \cdots \\ & & & \cdots & \cdots \\ & & & & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2-16)$$

上記のQR分解にはギブズ(Givens)回転行列を用います。 A_k はヘッセンベルグ行列ですから、 $a_{i, i-1}$ ($i=2, 3, \dots, n$) をすべて0にすれば上三角行列になります。 $a_{i, i-1}$ を0にするため、 i 軸・ $(i-1)$ 軸の平面の回転行列 $G_{i, i-1}$ を左側から掛けます。ここで、 $G_{i, i-1}$ は次式で表わされます。

$$G_{i,i-1} = \begin{matrix} & & & \langle i-1 \rangle & \langle i \rangle \\ \begin{matrix} \langle i-1 \rangle \\ \langle i \rangle \end{matrix} & \left(\begin{array}{cccc} 1 & & & \\ & \dots & & \\ & & 1 & \\ & & \cos \theta & \sin \theta \\ & & -\sin \theta & \cos \theta \\ & & & & 1 \\ & & & & \dots \\ & & & & & 1 \end{array} \right) \end{matrix} \quad (2-17)$$

注) $\langle \rangle$ は、行または列の番号を示す。

$G_{i,i-1} A_k$ により A の $(i, i-1)$ 要素は次のように変換されます。

$$\text{新} a_{i,i-1} = -a_{i-1,i-1} \sin \theta + a_{i,i-1} \cos \theta \quad (2-18)$$

故に、新 $a_{i,i-1}$ を 0 とおくと次式が得られます。

$$-a_{i-1,i-1} \sin \theta + a_{i,i-1} \cos \theta = 0 \quad (2-19)$$

(2-19) 式から $\cos \theta$ と $\sin \theta$ が以下のように表わされます (符号は正のものを採用)。

$$\cos \theta = \frac{a_{i-1,i-1}}{\sqrt{a_{i-1,i-1}^2 + a_{i,i-1}^2}} \quad (2-20)$$

$$\sin \theta = \frac{a_{i,i-1}}{\sqrt{a_{i-1,i-1}^2 + a_{i,i-1}^2}} \quad (2-21)$$

この変換を $i=2, 3, \dots, n$ について行なって、次式による上三角行列 R_k を得ます。

$$R_k = G_{n,n-1} G_{n-1,n-2} \cdots G_{32} G_{21} A_k \quad (2-22)$$

$$\therefore A_k = (G_{n,n-1} G_{n-1,n-2} \cdots G_{32} G_{21})^{-1} R_k \quad (2-23)$$

(2-14) 式と (2-23) 式を見比べて次式が得られます。

$$Q_k = (G_{n,n-1} G_{n-1,n-2} \cdots G_{32} G_{21})^{-1} \quad (2-24)$$

2.7 ダブルQR法 ^{B2)}

ダブルQR法は、QR法における2回分の操作を1度に行なうもので、複素固有値の場合に実数のまま計算できる方法です。固有値が複素数の場合は、1対の共役複素数が解となります。そして、ダブルQR法では、行列 A_k の右下2行2列から算出される共役の固有値を収束計算させ、収束後はその2行2列を除いて行列の次数を減らし、その次の共役固有値を計算していきます。収束は、最終行の1つ前の行で、対角から2つ左側の要素 $a_{n-1,n-2}$ が 0 (打ち切り誤差以下) になったかどうかで判断します。

そこで、行列 A_k の形態を (2-25) 式に示します。その A_k の右下2行2列の複素固有値を μ とおくと、(2-26) 式に示す行列式の方程式が成立します。同方程式を (2-27) 式、(2-28) 式

のように展開して解くと、(2-29)式の解が得られます。そこで、2つの解の一方を μ 、他方を $\bar{\mu}$ とおくと、(2-30)式、(2-31)式が成立します。

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & a_{22} & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & a_{n-1, n-1} & a_{n-1, n} \\ & & & & a_{n, n-1} & a_{nn} \end{bmatrix} \quad (2-25)$$

$$\begin{vmatrix} a_{n-1, n-1} - \mu & a_{n-1, n} \\ a_{n, n-1} & a_{nn} - \mu \end{vmatrix} = 0 \quad (2-26)$$

$$\therefore (a_{n-1, n-1} - \mu)(a_{nn} - \mu) - a_{n-1, n} a_{n, n-1} = 0 \quad (2-27)$$

$$\therefore \mu^2 - (a_{n-1, n-1} + a_{nn}) \mu + a_{n-1, n} a_{nn} - a_{n-1, n} a_{n, n-1} = 0 \quad (2-28)$$

$$\therefore \mu = \frac{a_{n-1, n-1} + a_{nn} \pm \sqrt{(a_{n-1, n-1} + a_{nn})^2 - 4(a_{n-1, n} a_{nn} - a_{n-1, n} a_{n, n-1})}}{2} \quad (2-29)$$

$$\mu + \bar{\mu} = a_{n-1, n-1} + a_{nn} \quad (2-30)$$

$$\mu \bar{\mu} = a_{n-1, n-1} a_{nn} - a_{n-1, n} a_{n, n-1} \quad (2-31)$$

そこで、QR分解を行なう際に、右下2行2列から算出される固有値分だけ原点移動して計算します。複素固有値の場合、共役の1対分、すなわち2個の固有値の原点移動を続けて実施すると、変換は以下ようになります。

$$A_k - \mu E = Q_k R_k \quad (2-32)$$

$$A_{k+1} = R_k Q_k + \mu E \quad (2-33)$$

$$A_{k+1} - \bar{\mu} E = Q_{k+1} R_{k+1} \quad (2-34)$$

$$A_{k+2} = R_{k+1} Q_{k+1} + \bar{\mu} E \quad (2-35)$$

この2回のQR分解を1回にまとめると次のようになります。

$$A_{k+2} = (Q_k Q_{k+1})^{-1} A_k (Q_k Q_{k+1}) \quad (2-36)$$

$$(A_k - \mu E)(A_k - \bar{\mu} E) = (Q_k Q_{k+1})(R_{k+1} R_k) \quad (2-37)$$

(2-37)式の左辺を行列Bとおくと、Bは次のようになります。

$$B = A_k^2 - (\mu + \bar{\mu}) A_k + \mu \bar{\mu} E \quad (2-38)$$

本式の μ と $\bar{\mu}$ を含む係数部は、(2-30)式、(2-31)式により計算でき実数となります。BをQR分解すると次式で表わされます。

$$B = Q R \quad (2-39)$$

ただし、行列Bにおいて、相似変換により0とする要素は、 $b_{i, i-2}$ および $b_{i, i-1}$ ($i=2, 3, \dots, n$)です。前述のシングルQR法に比べて、このダブルQR法では $b_{i, i-2}$ が余分に加わっています。それは、(2-38)式に見られるように、Bはヘッセンベルグ行列 A_k の2乗がベースになっているため、対角要素の2つ左隣まで数値が入りうるからです。

(2-38)式、(2-39)式を(2-37)式と比べると以下の式が成立します。

$$Q = Q_k Q_{k+1} \quad (2-40)$$

$$R = R_{k+1} R_k \quad (2-41)$$

$$\therefore A_{k+2} = Q^{-1} A_k Q \quad (2-42)$$

従って、(2-38)式の行列Bを作成してQR分解し、(2-42)式を計算することを繰返して、収束させることにより、実数演算だけで複素数の共役固有値 μ 、 $\bar{\mu}$ を算出できます。

なお、前述のように、1対の共役固有値 μ 、 $\bar{\mu}$ を算出できたら、右下2行2列を減次してその次の固有値計算に移ります。そして、最後に残った左上2行2列の行列からは、直接、1対の共役固有値を算出します。

2.8 固有ベクトルの計算方法

(2-1)式の固有値（複素数） μ が求まったら、その1つずつの μ について固有ベクトル z を算出します。その算出方法を以下に説明します。

μ と z を複素数表示した(2-2)式と(2-3)式を(2-1)式に代入すると次式となります。

$$A(x + iy) = (\alpha + i\beta)(x + iy) \quad (2-43)$$

$$\therefore Ax + iAy = \alpha x - \beta y + i(\beta x + \alpha y) \quad (2-44)$$

$$\therefore Ax - \alpha x + \beta y + i(-\beta x + Ay - \alpha y) = 0 \quad (2-45)$$

(2-45)式の実数部と虚数部をそれぞれ0とおくと次式が得られます。

$$(A - \alpha E)x + \beta y = 0 \quad (2-46)$$

$$-\beta x + (A - \alpha E)y = 0 \quad (2-47)$$

(2-46)式と(2-47)式をまとめて行列方程式で表わすと次式となります。

$$\begin{bmatrix} A - \alpha E & \beta \\ -\beta & A - \alpha E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 0 \quad (2-48)$$

(2-48)式において、左側の行列は既知であり、ベクトル x 、 y のいずれか1つの要素に数値を設定すれば、連立1次方程式として解くことができます。従って、本ソフトでは x の第1要素 x_1 を1に設定して、 x と y を算出します。その後、 x と y を合わせたベクトル z を正規化します。

2.9 ベクトルの正規化

固有ベクトル z の正規化は、非対称行列と同様ですが、ベクトルは実数部の x と虚数部の y を合わせたものとなります。従って、複素固有値の場合は x と y を合わせた次数 $2n$ のベクトルを改めて x と y において、(1-23)式、(1-24)式により計算します。また、固有ベクトルが実数の場合は、虚数部 y がゼロベクトルとなりますので、実数部 x だけで正規化します（虚数部 y を合わせても同じ結果）。

2.10 固有値の計算順序への対応

QR複合方式では、ダブルQR法またはシングルQR法により、行列末尾の方から絶対値が小さい順に固有値を1対（複素数）または1個（実数）ずつ算出します。しかるに、

2.3節のハウスホルダー法では、元の行列Aと同じ次数のヘッセンベルグ行列に変換し、他方、2.4節のアーノルディ法では縮小した次数のヘッセンベルグ行列に変換します。従って、いずれの解法でも、指定の任意個数の固有値を算出できるよう工夫します。すなわち、ハウスホルダー法では絶対値の大きい順に、アーノルディ法では絶対値の小さい順に指定個数の固有値を求める場合は、(2-1)式を次のように変形します。

$$A^{-1} \mathbf{z} = (1/\mu) \mathbf{z} \quad (2-49)$$

上式は、 A^{-1} と $1/\mu$ を新たにAと μ におけば、(2-1)式となりますので、同式で絶対値の大きい順の固有値計算問題として解きます。そして、ハウスホルダー法使用の場合は、元行列と同じ次数の行列末尾から絶対値の小さい順に算出された固有値 μ に対して $1/\mu$ を計算すれば、元行列の固有値が絶対値の大きい順に求まったこととなります。また、アーノルディ法使用の場合は、小行列のすべての固有値を算出し、その絶対値の大きい順の固有値 μ に対して $1/\mu$ を計算すれば、元行列の固有値が絶対値の小さい順に求まったこととなります。

2.11 行列要素のバランス処理 ^{B4)}

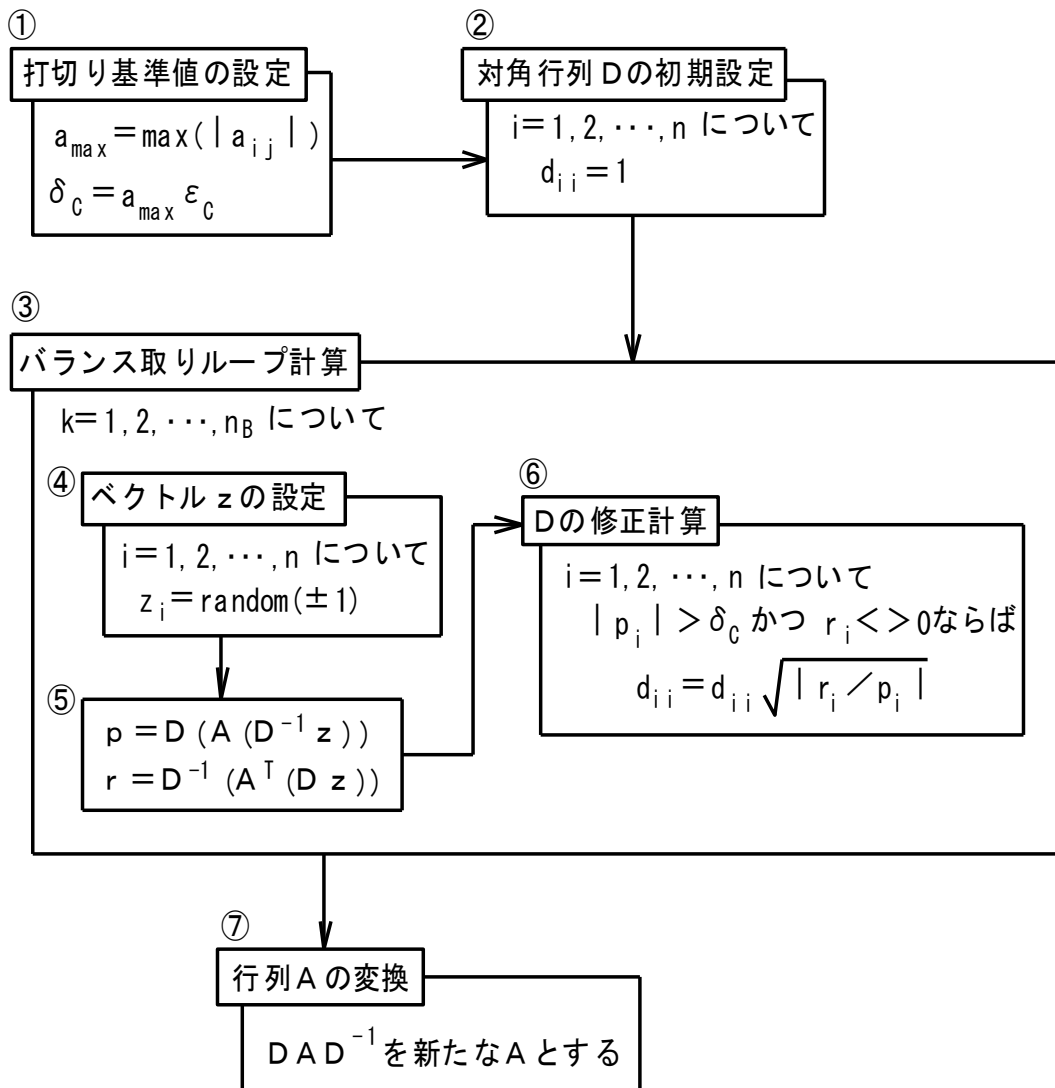
これは、行列内の要素数値間で絶対値のレベル差を小さくする処理を言います。要素数値間で絶対値のレベル差が大きいと固有値計算の誤差も大きくなる傾向があります。本ソフトでは、クリロフ(Krylov)法のバランス処理を用意してしており、その計算フロー図を図2-2に示します。ただし、同図の①「打切り基準値の設定」において、計算の簡略化のため、打切り基準値 δ_{cl} は、要素の最大絶対値 a_{max} に ε_c を掛けた値としています。

クリロフ法は、対角行列Dを設定して、行列Aの要素バランスを低減するように対角要素 d_{ii} を変更します。Dが確定したら、図2-2の⑦「行列Aの変換」により、要素バランスを改善した行列を計算して新たなAとします。新たなAの形態(対称形、3重対角形、ヘッセンベルグ形等)は元行列と同じです。また、本図のバランス処理計算は、フルマトリックスどうしの掛け算等がありませんので、計算量は小さくてすみ、計算時間があまりかかりません。従って、行列次数の大きい場合でも、バランス処理の計算時間は問題になりません。

注) 図2-2の⑦「行列Aの変換」において行列どうしの掛け算がありますが、Dが対角行列であるため、実際の計算は行列とベクトルの掛け算相当です。

非対称行列の場合は、固有値計算の収束性が対称行列より劣ります。そのため、本ソフトでは、アーノルディ法で生成した小次数のヘッセンベルグ行列に対してもバランス処理を任意回数実施可能としています。

元行列のバランス処理と小行列のバランス処理を併せて実行することにより、元行列の要素間で絶対値に大きなレベル差がある非対称行列の場合に、精度良く算出できる固有値の個数(対)を増加できた実例があります。



注) A、D : 行列、 p、r、z : ベクトル
 それぞれの添え字付き小文字はその要素を示す
 A^T : Aの転置行列
 n : 上記行列、ベクトルの次数
 n_B : バランス取りループ回数 (例 : 5)
 ε_c : 打ち切り基準比率 (1E-8を採用)
 random(±1) : ランダムに1か-1を与える

図2-2 バランス処理の計算フロー図 (クリロフ法)

第3章 固有値計算のパラメーター条件

固有値計算のパラメーター条件について、表3-1に対称行列と非対称行列をまとめて項目を示します。パラメーター条件は自動設定かユーザー設定かを選択でき、ユーザー設定を選択した場合に表3-1の項目の数値を変更設定することができます。また、同表で⑤「消去計算実施の基準比率（対打ちり誤差率）」とは、QR複合方式で上三角行列に変換する消去計算を行なう際に、消去を実施するかどうかの基準比率で、収束判定の④「計算打ちり誤差率」に対する比を設定します。この2つの設定項目を設けている理由は、消去計算実施の基準比率を収束判定の計算打ちり誤差率より小さく設定するためです。

表3-1 固有値計算のパラメーター条件の項目

項目	対称 行列		非対称 行列	
	ヤコビ法	ランチョス法	ハウスホルダー法	アールティ法
①バランス処理1回当たりのループ計算回数	○	○	○	○
②初期のバランス処理の有無	○	○	○	○
③繰り返し計算の最大回数	○		○	○
④計算打ちり誤差率	○	○	○	○
⑤消去計算実施の基準比率(対打ちり比率)			○	○
⑥小行列の最大次数		○		○
⑦小行列のバランス処理回数				○
⑧ベクトル再直交化の基準比率		○		

注) ○：設定対象

「③繰り返し計算の最大回数」は、非対称行列の場合はQR法に適用

第4章 MK型振動固有値の計算方法

4.1 振動解析の方程式（自由振動）

有限要素法などを利用して多自由度の振動解析を行なうことができます。静的な構造解析の基本方程式は、次式で示されます。

$$K u = f \quad (4-1)$$

ただし、 K ：剛性マトリックス（対称）

u ：変位ベクトル

f ：荷重ベクトル

他方、動的な自由振動問題の場合、慣性力だけが作用する場合の方程式は次式で示されます。

$$K u = -M \frac{d^2 u}{dt^2} \quad (4-2)$$

ただし、 M ：質量マトリックス（対称、正定値）

注）正定値行列とは、ゼロベクトル以外のいなるベクトル x に対しても、2次形式 $x^T M x > 0$ になる行列です。正定値行列の固有値はすべて正となります。

なお、上付きの T は転置を意味します（以下同様）。

t ：時間

本問題の一般解は次式で表わされます。

$$u = (a \sin \omega t + b \cos \omega t) x \quad (4-3)$$

ただし、 ω ：固有角速度（ 2π で割ると固有振動数）

x ：固有ベクトル

a, b ：任意定数

(4-3)式を(4-2)式に代入すると、次式が得られます。

$$K x = \lambda M x \quad (4-4)$$

ただし、 λ ：固有値

$$\lambda = \omega^2 \quad (4-5)$$

すなわち、(4-4)式の固有値 λ と固有ベクトル x を算出できれば、(4-3)式の解ベクトル u が得られます。このように慣性力だけが作用する場合の振動固有値問題をMK型と呼びます。

4.2 固有値計算の解法

Mk型は(3-4)式における実数の固有値 λ および固有ベクトル x を算出する問題となります。算生会のソフトでは、算出する固有値の個数は、絶対値の大きい順または小さい順に任意に設定できるようにしています。

(4-4)式で示される本問題の解法としては、 M を左辺に移して標準固有値問題（対称行列1個の問題）に変換して解きます。そのため、行列 M をコレスキー(Cholesky)分解して、次式で表わします。

$$M = U^T U \quad (4-6)$$

ただし、 U ：右上三角行列（対角要素から右側のみに数値がある行列）
 (4-6)式を(4-4)式に代入すると、次式が得られます。

$$K \mathbf{x} = \lambda U^T U \mathbf{x} \quad (4-7)$$

$$\therefore (U^T)^{-1} K \mathbf{x} = \lambda U \mathbf{x} \quad (4-8)$$

ただし、上付きの $^{-1}$ は逆行列を意味します（以下同様）。

$$\therefore (U^T)^{-1} K U^{-1} U \mathbf{x} = \lambda U \mathbf{x} \quad (4-9)$$

しかるに、 U は右上三角行列ですので次式が成立します。

$$(U^T)^{-1} = (U^{-1})^T \quad (4-10)$$

(4-10)式を(3-9)式に代入すると、次式が得られます。

$$\{(U^{-1})^T K U^{-1}\} U \mathbf{x} = \lambda U \mathbf{x} \quad (4-11)$$

$$\therefore A \mathbf{y} = \lambda \mathbf{y} \quad (4-12)$$

$$\text{ただし、} A = (U^{-1})^T K U^{-1} \quad (4-13)$$

$$\mathbf{y} = U \mathbf{x} \quad (4-14)$$

従って、本問題は、(4-12)式に示される対称行列の標準固有値問題に帰着されます。
 対称行列の標準固有値問題の解法は第1章を参照してください。

4.3 コレスキー分解の計算式 ⁽⁵⁾

行列 A の次数を n 、各要素を a_{ij} ($i, j=1, 2, \dots, n$) とします（以降も同様）。 A が正定値行列の場合に、次式のように左下三角行列 L 、または右上三角行列 U により積の形に分解でき、これをコレスキー分解と言います。

$$A = L L^T = U^T U \quad (4-15)$$

行列 U の各要素 u_{ij} は以下のように計算できます。

$$\textcircled{1} \quad u_{11} = \sqrt{a_{11}} \quad (4-16)$$

② $j=2, 3, \dots, n$ について

$$u_{1j} = a_{1j} / u_{11} \quad (4-17)$$

③ $i=2, 3, \dots, n$ について

$$u_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki}^2} \quad (4-18)$$

$i < n$ の場合、 $j=i+1, \dots, n$ について

$$u_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} u_{ki} u_{kj}}{u_{ii}} \quad (4-19)$$

第5章 MCK型振動固有値の計算方法

5.1 振動解析の方程式（自由振動）

慣性力と減衰力が加わる場合の方程式は次式で示されます。

$$K u = -M \frac{d^2 u}{dt^2} - C \frac{du}{dt} \quad (5-1)$$

ただし、 K ：剛性マトリックス（対称）
 M ：質量マトリックス（対称、正定値）
 C ：減衰マトリックス（対称）
 u ：変位ベクトル
 t ：時間

本問題の基本解は次式で表わされます。

$$u = e^{\mu t} z \quad (5-2)$$

ただし、 μ ：固有値（複素数）

$$\mu = \alpha + i\beta \quad (5-3)$$

α 、 β ：実数 i ：虚数記号（以下同じ）

z ：固有ベクトル（複素数）

$$z = x + iy \quad (5-4)$$

x 、 y ：実数ベクトル

(5-2)式を(5-1)式に代入すると、次式が得られます。

$$\mu^2 M z + \mu C z + K z = 0 \quad (5-5)$$

すなわち、(5-5)式の固有値 μ と固有ベクトル z を算出できれば、(5-2)式の解ベクトル u が得られます。このように慣性力と減衰力が作用する場合の振動固有値問題をMCK型と呼びます。

上記の固有値 μ と固有ベクトル z については、それらが複素数の場合は、必ず共役複素数の $\bar{\mu}$ と \bar{z} が対の解となるので、(5-2)式のかわりに次式を作成します。

$$u = e^{\mu t} z + e^{\bar{\mu} t} \bar{z} \quad (5-6)$$

(5-6)式に(5-3)式、(5-4)式を代入して整理すると、次式が得られます。

$$u = e^{\alpha t} (\cos \beta t \cdot x - \sin \beta t \cdot y) \quad (5-7)$$

ここで、次式によるベクトル s を定義します。

$$s = \mu z \quad (5-8)$$

(5-8)式により、(5-5)式の第1項と第2項の μz を s に変換すると次式となります。

$$\mu M s + C s + K z = 0 \quad (5-9)$$

$$\therefore -K z - C s = \mu M s \quad (5-10)$$

$$\therefore -M^{-1} K z - M^{-1} C s = \mu s \quad (5-11)$$

(5-8)式と(5-11)式をまとめて行列方程式で表わすと次式となります。

$$\begin{bmatrix} 0 & E \\ -M^{-1} K & -M^{-1} C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z \\ s \end{bmatrix} = \mu \begin{bmatrix} z \\ s \end{bmatrix} \quad (5-12)$$

ただし、E：単位行列（以下同様）

$$\therefore A \mathbf{w} = \mu \mathbf{w} \quad (5-13)$$

ここで、

$$A = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{E} \\ -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{K} & -\mathbf{M}^{-1} \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (5-14)$$

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (5-15)$$

従って、本問題は、(5-13)式に示される非対称行列の標準固有値問題に帰着されます。

MCK型の特別なケースとして、比例減衰の場合があります。比例減衰とは次式のように、減衰マトリックスCが質量マトリックスMと剛性マトリックスKに比例した式で表わされるものです。

$$\mathbf{C} = a\mathbf{M} + b\mathbf{K} \quad (5-16)$$

ただし、a、b：比例定数

(5-16)式を(5-5)式に代入し、ベクトル \mathbf{z} のかわりに \mathbf{x} とおくと次式となります。

$$\mu^2 \mathbf{M} \mathbf{x} + \mu (a\mathbf{M} + b\mathbf{K}) \mathbf{x} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (5-17)$$

$$\therefore (\mu^2 + a\mu) \mathbf{M} \mathbf{x} + (b\mu + 1) \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{0} \quad (5-18)$$

$$\therefore \mathbf{K} \mathbf{x} = -\{(\mu^2 + a\mu) / (b\mu + 1)\} \mathbf{M} \mathbf{x} \quad (5-19)$$

$$\therefore \mathbf{K} \mathbf{x} = \lambda \mathbf{M} \mathbf{x} \quad (5-20)$$

$$\text{ただし、} \lambda = -(\mu^2 + a\mu) / (b\mu + 1) \quad (5-21)$$

すなわち、(5-20)式のMK型振動固有値問題に帰着します。そして、同式の実数固有値 λ が求まったら、(5-21)式を次のように μ の2次方程式に展開してMCK型としての固有値 μ を算出します。

$$\mu^2 + (a + b\lambda) \mu + \lambda = 0 \quad (5-22)$$

$$\therefore \mu = \frac{-(a + b\lambda) \pm \sqrt{(a + b\lambda)^2 - 4\lambda}}{2} \quad (5-23)$$

なお、(5-23)式で μ は根号内の正負により実数または複素数となります。

5.2 固有値計算の解法

MCK型は(5-13)式における複素数の固有値 μ および固有ベクトル \mathbf{z} を算出する問題となります。ただし、上述の比例減衰の場合は、(5-20)式における実数の固有値 λ および固有ベクトル \mathbf{x} を算出し、さらに(5-23)式により複素数の固有値 μ を再計算する問題となります。この比例減衰のMCK型の解法は、(5-23)式以外はMK型と同じですので、ここでは省略します。

また、算生会ソフトでは、算出する固有値の個数（対）は、絶対値の大きい順または小さい順に任意に設定できるようにしています。

先ず、(5-13)式のベクトル \mathbf{w} を \mathbf{z} に書き換えて、次式により非対称行列の標準固有値

問題を再定義します。ただし、(5-13)式の行列Aは、元の質量マトリックス等の次数nに対して、次数が倍の2nになっていますが、一般化のため次式では2nをnに置き換えて表現します。

$$A \mathbf{z} = \mu \mathbf{z} \quad (5-24)$$

ただし、A : 非対称行列 (n次)

μ : 複素数の固有値

$$\mu = \alpha + i \beta \quad (5-25)$$

ここで、 α : 固有値の実数部

β : 固有値の虚数部

i : 虚数記号

\mathbf{z} : 複素数の固有ベクトル (n次)

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + i \mathbf{y} \quad (5-26)$$

ここで、 \mathbf{x} : 固有ベクトルの実数部 (n次)

\mathbf{y} : 固有ベクトルの虚数部 (n次)

標準固有値解析では、(5-24)式について、固有値 μ と固有ベクトル \mathbf{z} を算出します。非対称行列の場合は、固有値が実数になったり複素数になったりします。それはn次方程式の根が実数もあれば虚数もあるということと同じです。また、固有値に応じて固有ベクトルも実数か複素数になります。そのため、固有値 μ と固有ベクトル \mathbf{z} はそれぞれ(5-25)式、(5-26)式のように実数部と虚数部に分けて表わします。

なお、MCK型振動固有値問題の場合、一般に固有値は複素数となります。

非対称行列の標準固有値問題の解法は第2章を参照してください。なお、固有値の大きさの順序を逆にして、固有値 $1/\mu$ を計算する場合は、(5-12)式を次式のように変形します。

$$\begin{bmatrix} -K^{-1}C & -K^{-1}M \\ E & O \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} = (1/\mu) \begin{bmatrix} \mathbf{z} \\ \mathbf{s} \end{bmatrix} \quad (5-27)$$

[参考文献]

<A> BASIC言語

- A1) 「Microsoft Visual Basic プログラミング ガイド」、マイクロソフト (株)、1997
- A2) 「実力アップ Visual Basic.NET 基礎編」、川口 輝久、(株) 技術評論社、2003
- A3) 「Visual Basic 応用プログラミング」、林 晴比古、ソフトバンク (株)、1997
- A4) 「Visual Basic for Windows プログラミング・パーツ」、河西 朝雄、(株) ナツメ社、1994
- A5) 「かんたんプログラミング Visual Basic.NET 応用編」、田中 亨、(株) オーム社、2002
- A6) 「Visual Basic リファレンス・ブック」、相沢 文雄、(株) ナツメ社、1994
- A7) 「プログラミング Visual Basic.Net Vol.2 活用編」、Francesco Balena、(株) ドキュメントシステム 訳、日経BPソフトプレス、2002
- A8) 「Visual Basic 2005 [実践]プログラミングテクニック」、谷尻 かおり、技術評論社、2007

 数値計算・グラフィックス

- B1) 「数学公式・数表ハンドブック」、スピーゲル 著、氏家 勝巳 訳、マグローヒル ブック (株)、1984
- B2) 「数値解析とその応用」、名取 亮、コロナ社、1992
- B3) 「線形計算」、名取 亮、朝倉書店、1993
- B4) 「Templates for the Solution of Algebraic Eigenvalue Problems」、Zhaojun Bai 他、Society for Industrial and Applied Mathematics、2000
- B5) 「Visual Basicによる固有値計算&振動解析プログラム」、黒田 英夫、CQ出版社、2003

<C> 有限要素法・差分法・工学一般

- C1) 「マトリックス有限要素法」、O. C. Zienkiewicz 他、吉識 雅夫 監訳、(株) 培風館、1970
- C2) 「有限要素プログラミング」、E. Hinton 他、川井 忠彦 監訳、丸善 (株)、1981
- C3) 「流体解析への有限要素法の応用」、J. J. Connor 他、奥村 敏恵 監訳、サイエンス社、1981
- C4) 「マイコンによる有限要素解析」、戸川 隼人、(株) 培風館、1982
- C5) 「有限要素法による振動解析」、戸川 隼人、サイエンス社、1997
- C6) 「The Finite Element Method (Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis)」、Thomas J. R. Hughes、Dover Publications、2000